Přesný výpočet obvodu kružnice

Bohumír Tichánek

OBSAH

0. Užité veličiny

r_{Eu} … poloměr kružnice v Euklidově prostoru

O_{Eu} … obvod kružnice v Euklidově prostoru

x, y … prostorové osy.

Eu … index Euklidovských veličin

Pe … index perspektivních veličin

1. Podstata problému

K výpočtu obvodu kružnice používáme neohraničeného - iracionálního Ludolfova čísla π. Pro přesný výsledek použijeme třeba i obrovského počtu desetinných míst. Ta přesnost může být i kuriózní, nepotřebná, například s $10^{1\,000\,000}$ desetinnými místy.

Svět zdůvodňuji diskrétním prostorem, který má předepsanou délku kroku. Při přepočtu do prostoru perspektivního nebo Euklidova z něj lze vycházet.

Následně předpokládám hraniční - nejpřesnější možný výsledek.

2. Úkol

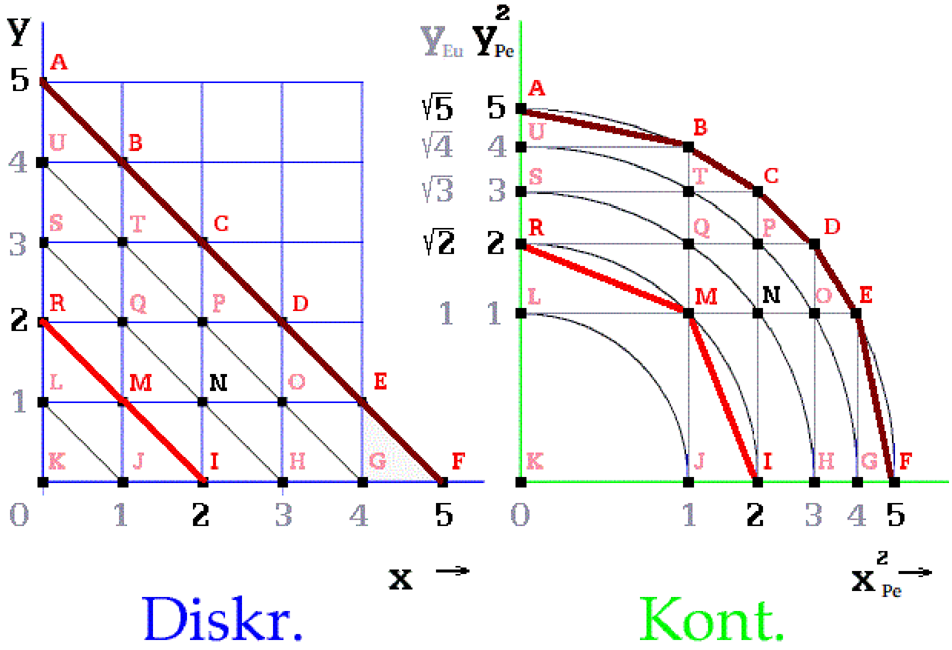
Počítám obvod kružnice a to s ohledem na optimální přesnost výpočtu. Diskrétní prostor má krok daný Planckovou délkou (*obr. 1*). Pak není potřebné udávat velikost obvodu euklidovské kružnice s přesností, která by překonávala omezení konečné délky kroku v diskrétním prostoru.

Po převodu délky do euklidovského prostoru již nebudu používat pravoúhlé kroky, nýbrž pro určení vzdáleností nahradím dva pravoúhlé kroky (např. AU, UB) jedním šikmým - úhlopříčným krokem (AB). Použitý postup převádí diskrétní kružnici do kontinua, ovšem s omezením, které určuje konečný počet kroků. Liší se od ideální kružnice.

Výpočty řeším v Euklidově prostoru.

Obvod ideální kulaté kružnice spočítám dle $O_{Eu} = 2 \cdot \pi \cdot r$.

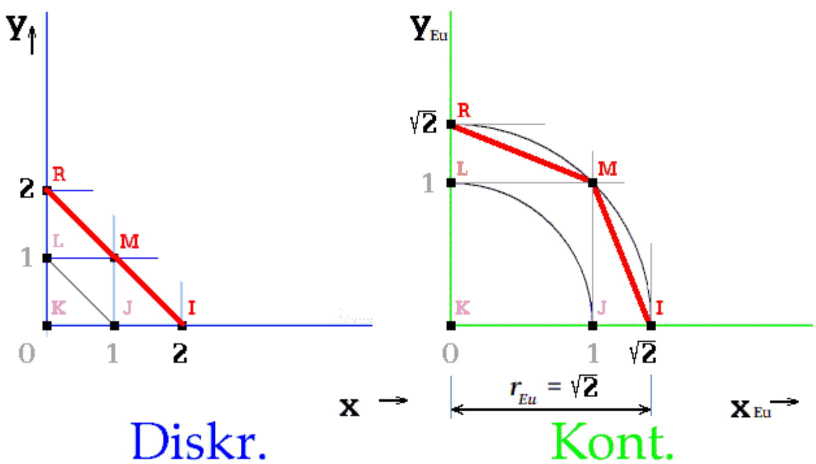
Obvod mnohoúhelníku (hranaté napodobeniny) O_{Pe} spočítám sečtením všech úseček, které tvoří jeho hranatý obvod. Vícenásobně využiji Pythagorovu větu. Výpočet se prodlužuje s růstem průměru kružnice. Zde v dalším jen pro r = 2 a r = 5.



Obr. 1. Kružnice v diskrétním a ve spojitém prostoru 12obr5_pe+eu.png

3. Kružnice poloměru dvou kroků

Euklidův prostor. Výpočet obvodu mnohoúhelníku (kružnice) o poloměru $r = \sqrt{2}$



Obr. 2. Přepočet kružnice $r = \sqrt{2}$ z diskrétního prostoru do kontinua 12obr6_r=2.png

3.a Výpočet délky úseku RM

$(RM)^2 = (LR)^2 + (LM)^2$

$LR = \sqrt{2} - 1$

$LM = 1$

$(RM)^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2$

$(RM)^2 = (2 - 2\sqrt{2} + 1) + 1$

$RM = \sqrt{(4 - 2\sqrt{2})}$

$RM = \sqrt{1{,}1715}$

$RM = 1{,}0823$

$RM = MI$

$O_{Pe} = 8 \cdot RM = 8{,}6584$

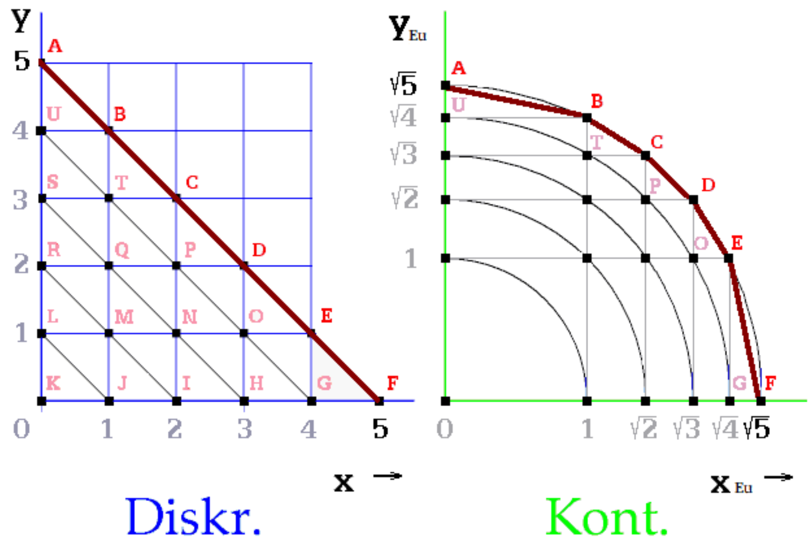
Euklidův prostor. Výpočet obvodu ideální kružnice o poloměru *r* = √2

$O_{Eu} = 2 \cdot \pi \cdot r$

$r = \sqrt{2}$

$O_{Eu} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} = 8{,}8854$

4. Kružnice poloměru pěti kroků



Obr. 3. Přepočet kružnice r=5 z diskrétního do spojitého prostoru *12obr7_r=5.png*

Euklidův prostor. Výpočet obvodu mnohoúhelníku (kružnice) o poloměru *r* = √5

Výpočty úseků AB, BC, CD

4.a Výpočet délky úseku AB

$(AB)^2 = (UA)^2 + (UB)^2$

$UA = \sqrt{5} - \sqrt{4}$

UB = 1

$(AB)^2 = (\sqrt{5} - \sqrt{4})^2 + 1^2$

$(AB)^2 = (2{,}2360 - 2)^2 + 1^2$

$(AB)^2 = 0{,}2360^2 + 1^2$

$(AB)^2 = 1{,}0557$

AB = 1,0274

4.b Výpočet délky úseku BC

$(BC)^2 = (TB)^2 + (TC)^2$

$TB = \sqrt{4} - \sqrt{3}$

$TC = \sqrt{2} - 1$

$(BC)^2 = (\sqrt{4} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2$

$(BC)^2 = (2 - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2$

$(BC)^2 = 0{,}2679^2 + 0{,}4142^2$

$(BC)^2 = 0{,}0717 + 0{,}1715$

$(BC)^2 = 0{,}2432$

BC = 0,4931

4.c Výpočet délky úseku CD

$(CD)^2 = (PC)^2 + (PD)^2$

$PC = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$PD = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$(CD)^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

$(CD)^2 = 2 \cdot (1{,}7320 - 1{,}4142)^2$

$(CD)^2 = 2 \cdot (0{,}3178)^2$

$CD = \sqrt{2} \cdot 0{,}3178$

CD = 0,4494

4.d Výpočet obvodu, $r = \sqrt{5}$

Čtvrtkružnici tvoří AB + BC + CD + DE + EF

kde AB = EF, BC = DE

Obvod kružnice $O_{Pe} = 8 \cdot AB + 8 \cdot BC + 4 \cdot CD$

$O_{Pe} = 8 \cdot 1{,}0274 + 8 \cdot 0{,}4931 + 4 \cdot 0{,}4494$

$O_{Pe} = 8{,}2192 + 3{,}9464 + 1{,}7976$

$O_{Pe} = 13{,}9632$

Euklidův prostor. Výpočet obvodu ideální kružnice o poloměru $r = \sqrt{5}$

$O_{Eu} = 2 \cdot \pi \cdot r$

$r = \sqrt{5}$

$O_{Eu} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{5} = 14{,}0492$

5. Zhodnocení

Odchylka mezi výsledky pro ideální a převedenou kružnici ***r*** = 2 se liší o 0,2270 (obvod 8,6584 pro "hranatou" kružnici a obvod 8,8854 pro výpočet Ludolfovým číslem).

Odchylka mezi výsledky pro ideální a převedenou kružnici ***r*** = 5 je zde menší. Už jen o 0,0860 (obvod 13,9632 pro neoblou kružnici a obvod 14,0492 pro výpočet Ludolfovým číslem).

Počítám-li obvod kružnice o malém průměru, pak jsou oba výsledky velmi odlišné. Malým průměrem zde chápu kružnici v rozměrech ještě menších, než jsou běžné v kvantové mechanice.

Avšak rostoucím kružnicím se odlišnost výsledků zmenšuje. Kružnici o průměru 1 metr odpovídá $2{,}5 \cdot 10^{34}$ Planckových délek, když jedna délka je asi $4 \cdot 10^{-35}$ m. Sblížení výsledků obou výpočtů je podmíněné obrovským počtem hran obrazce, který napodobuje kružnici.

Postupem hranatých napodobenin se původně počítalo Ludolfovo číslo.

6. Závěr

Lze si představit, že naši potomci budou řešit ve hmotě takové úkoly, u kterých budou usilovat o absolutní přesnost výpočtů. Například pro určení krouživého pohybu meteoritů s velkou přesností a to dlouhodobě. Planckova délka a převod z diskrétního do kvadratického prostoru přibližují, jak stanovit výpočet dráhy s absolutní přesností.

Vesmírný prostor spočívá na výpočetních zákonech, stvořený s absolutní přesností.

V Letovicích, 22. 5. 2023ba

www.tichanek.cz